23.11.23 12у

Математика

1 урок: «Показательные уравнения и неравенства»

Контрольная работа

1. Решить уравнение:

1) $(0{,}2)^{2-3x} = 25$; 2) $7^{x+1} + 5 * 7^{x} = 588$;

3) $5^{2x-3} = 125$.

2. Решить неравенство:

$(\frac{3}{4})^{x} > \frac{4}{3}$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 5^{x+y} = 25. \end{cases}$$

4. Решить неравенство:

1) $(\sqrt{5})^{x-6} < 25$; 2) $(\frac{2}{3})^{x-9} \geq 1$.

5. Решить уравнение:

$4^{x} - 12 * 2^{x} + 32 = 0$.

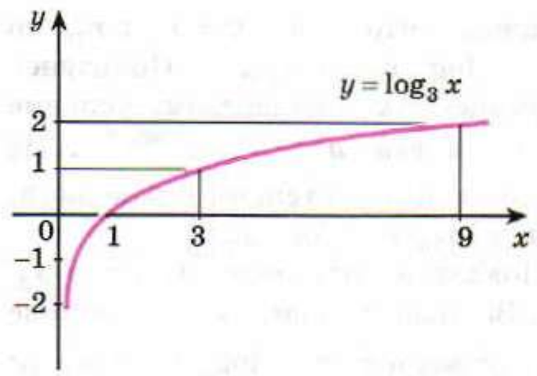
2 урок

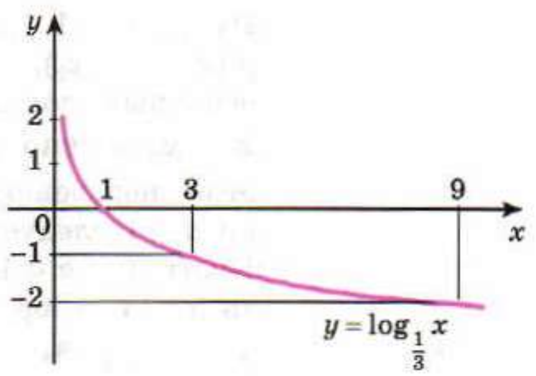
«Логарифмические уравнения и неравенства»

Теория (конспект)

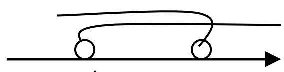
Логарифмическая функция

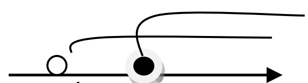
$y = \log_3 x$ (возрастает) $y = \log_{1/3} x$ (убывает)





При решении простейших логарифмических уравнений и неравенств: обе части приводим к логарифму с одним и тем же основанием.

<table>
<tr>
<td>$\log_2 (3x + 4) = 4$
$\log_2 (3x + 4) = \log_2 16$ $4 = \log_2 16$
$3x + 4 = 16$
$3x = 12$
$x = 4$
Ответ: x = 4.</td>
<td>$\log_2 (3x + 4) \le 4$
$\log_2 (3x + 4) \le \log_2 16$
$\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ 3x + 4 \le 16 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x > -4 \\ 3x \le 12 \end{cases}$
$\begin{cases} x > -4/3 \\ x \le 4 \end{cases}$
Знак неравенства **не меняется**, так как основание логарифма 2 > 1 и сама функция возрастающая.


Ответ: (- 4/3; 4).</td>
</tr>
<tr>
<td>$\log_3 (2x - 5) = 2$
$\log_3 (2x - 5) = \log_9 16$ $2 = \log_3 9$
$2x - 5 = 9$
$2x = 14$
$x = 7$
Ответ: x = 7.</td>
<td>$\log_{0,5} (3x + 4) \le 4$
$\log_{0,5} (3x + 4) \le \log_{0,5} (- 16)$
$\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ 3x + 4 \ge - 16 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x > -4 \\ 3x \ge - 12 \end{cases}$


$\begin{cases} x > -4/3 \\ x \ge - 4 \end{cases}$
Ответ: (4; +∞).</td>
</tr>
</table>

	Знак неравенства **меняется**, если основание логарифма 0<0,5<1 и функция убывающая.

Использование определения логарифма

Пример 2. Решить уравнения

a) $\log_2(x - 3) = 1$,   c) $\log_{(x-2)}9 = 2$,

b) $\log_3 \frac{x-3}{x+3} = 1,$

Решение. а) Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a* ($a > 0$, $a \neq 1$) называется степень, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить *b*. Таким образом, $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ и, следовательно,

$$\log_2(x - 3) = 1.$$

Используя определение, получим

$$x - 3 = 2^1, \quad x = 5.$$

b) Аналогично примеру a), получим из уравнения

$\log_3 \frac{x-3}{x+3} = 1,$ уравнение $\frac{x-3}{x+3} = 3,$ так как $1 = \log_3 3$.

откуда следует линейное уравнение $x - 3 = 3(x + 3)$ с решением $x = -6$. Сделаем проверку и убедимся, что $x = -6$ является корнем исходного уравнения.

c) Аналогично примеру a),

из уравнения $\log_{(x-2)}9 = 2$

получим уравнение $(x - 2)^2 = 9$.
Возведя в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$ с решениями $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.
После проверки остается лишь $x = 5$.

II. Использование свойств логарифма

Пример 3. Решить уравнения

a) $\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24)$,
b) $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -1/2.$

Решение. а) $\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24)$.

ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$ которое определяется из системы неравенств (условия существования логарифмов уравнения)

$$\begin{cases} x > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+24 > 0. \end{cases}$$

Получим, применяя свойство суммы логарифмов:

$$\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24), \quad \begin{cases} \log_3 x(x + 3) = \log_3(x + 24), \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x + 3) = x + 24, \\ x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6, \\ x_2 = 4, \end{array} \right. \\ x > 0, \end{cases} \quad x = 4.$$

b) $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -1/2$

Используя свойство **разности логарифмов** получим следствие исходного уравнения

$$\log_4 \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{2},$$

откуда, используя определение логарифма, получим

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = 4^{-\frac{1}{2}}$$

или

$$x^2 - 4x + 1 = 1/2(x^2 - 6x + 5),$$

откуда получаем уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

с решениями $x_1 = -1$ и $x = 3$. После проверки остается лишь $x = -1$.

III. Метод подстановки

В некоторых случаях логарифмическое уравнение можно свести к алгебрическому уравнению относительно новой переменной. Например, уравнение $F(\log_a x) = 0$, где $F(x)$ - алгебраическая рациональная функция, посредством подстановки $\log_a x = t$ сводится к алгебраическому уравнению относительно t, $R(t) = 0$.

Пример 4. Решить уравнения

$$\text{а) } \lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0.$$

Решение. а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$.

ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$.

Обозначив $\lg x = t$ (тогда $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$),

получим квадратное уравнение

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = 2, \end{array}\right.$$

откуда $x_1 = 10$ и $x_2 = 100$. Оба корня входят в *ОДЗ*.